CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS EM SÉRIES TEMPORAIS

Este capítulo traz os pontos básicos da análise de séries temporais que serão utilizados no desenvolvimento dos modelos nos capítulos seguintes. Conceituam-se processos estocásticos e séries temporais, mostram-se os tipos dos modelos de previsão e conceitua-se autocorrelação, ferramenta básica no estudo de séries no domínio de tempo.

2.1 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Apresentam-se a seguir os conceitos de processo estocástico, série temporal, estacionaridade e ruído branco, além da notação a ser utilizada.

Definição 2.1 — Processo estocástico

Um processo estocástico (real ou complexo), $\{X(t,\omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$, é uma seqüência (no tempo) de variáveis aleatórias (com valores reais ou complexos), $X(t,\omega)$, definidas num mesmo espaço de probabilidades (Ω, A, P). Se T é o conjunto dos inteiros, tem-se um processo de tempo discreto, se T é o conjunto dos reais, tem-se um processo de tempo contínuo. ■

Definição 2.2 — Série temporal

Uma série temporal $\{z_t,\ t \in T\}$ é um conjunto de observações geradas seqüencialmente no tempo. Quando os valores futuros de uma série temporal podem ser determinados exatamente por alguma função matemática, como

$$z_t = \cos(2\pi f t),$$

ela é chamada determinística. O caso mais comum, entretanto, é aquele em que seus valores futuros só podem ser descritos por uma distribuição de probabilidade, sendo, então, chamada estatística ou não-determinística. Neste último caso, a série temporal pode ser tomada como uma realização ou trajetória particular de um processo estocástico. Então, num processo estocástico, para t fixado $X(t,\omega)$ é uma variável aleatória e para ω fixado $X(t,\omega)$ é uma série temporal. ■

Uma característica fundamental das séries temporais é que suas observações não são, em geral, independentes, mas, serialmente correlacionadas, sendo de interesse as relações entre duas observações

consecutivas.

Exemplo 2.1 - São exemplos de séries temporais:

a) uma série de vendas mensais de um determinado produto, como a apresentada por PACK (27);

b) uma série de leituras horárias de um processo químico, como as séries de leituras de concentração, de temperatura e de viscosidade de um processo químico apresentadas por BOX & JENKINS (5);

c) uma série relacionada à qualidade do ar, como a série de medidas horárias da concentração de monóxido de carbono em New Jersey apresentada por LEDOLTER et alii (22);

d) uma série demográfica, como a série mensal de nascimentos apresentada por GAIT (12);

e) uma série de preços mensais de um determinado produto, como as séries de preços mensais de leite e de café apresentadas nos quadros 8.4 e 9.2, respectivamente;

f) uma série de produção mensal (ou anual) de determinado produto, como as séries de produção mensal de leite apresentada no quadro 8.3 e a de produção anual de café, no quadro 9.1; e

g) uma série meteorológica de precipitação pluviométrica ou de temperatura diária de um determinado local. ■

O aparecimento de séries temporais é comum nos estudos econômicos e demográficos e nos estudos de processos biológicos, químicos e industriais.

Definição 2.3 — Processo estacionário

Um processo diz-se estacionário quando permanece numa espécie de equilíbrio estatístico ao redor de um nível médio constante (em particular, o processo tem média fixa). O processo diz-se estritamente estacionário quando sua estrutura de probabilidade não depende da origem do tempo, mas, de diferenças no tempo, isto é, a distribuição

conjunta de N observações $z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_N}$ é a mesma que a de outro conjunto $z_{t_1+\tau}, z_{t_2+\tau}, \ldots, z_{t_N+\tau}$ afastadas no tempo de τ unidades:

$$P(z_{t_1+\tau} \in S_1, \ldots, z_{t_N+\tau} \in S_N) = P(z_{t_1} \in S_1, \ldots, z_{t_N} \in S_N),$$

para todo $t_1 < \ldots < t_N$, $\tau \in T$ e eventos reais $S_1, \ldots, S_N$. O processo diz-se fracamente estacionário de ordem m quando os momentos de ordem até m dependem somente de diferenças no tempo. Em geral, a estacionaridade fraca não implica a estacionaridade estrita. Uma exceção importante é a dos processos gaussianos, que são aqueles aos quais se associa a distribuição normal multivariada. Neste caso, a simples existência de uma média e de uma matriz de autocovariância já assegura estacionaridade, pois, a distribuição normal é completamente caracterizada pelos seus dois primeiros momentos. Então, estacionaridade de segunda ordem mais suposição de normalidade são suficientes para garantir estacionaridade estrita. ■

Em caso contrário o processo diz-se não-estacionário. Muitas séries de importância na indústria ou na economia são não-estacionárias e algumas sequer têm média natural (5).

Definição 2.4 — Ruído branco

Seja uma seqüência $\{a_t, t \in T\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (não necessariamente, mas, usualmente com distribuição normal de média zero e variância constante σ_a^2). Tais variáveis são chamadas choques aleatórios e a seqüência é chamada ruído branco. ■

Notação

No estudo dos processos a serem vistos no presente trabalho empregam-se os operadores definidos a seguir, os quais obedecem às leis da álgebra elementar:

a) operador translação para o passado (ou de retardamento, ou de atraso)

É denotado por B e definido por

$$B\, z_t = z_{t-1} \implies B^m z_t = z_{t-m} ;$$

b) operador translação para o futuro (ou de adiantamento)

É denotado por F e definido por

$$F\, z_t = z_{t+1} \implies F^m z_t = z_{t+m} .$$

Então, $F = B^{-1}$;

c) operador diferença

É denotado por ∇ e definido por

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - B)\, z_t .$$

Então, $\nabla = 1 - B$; e

d) operador soma

É denotado por S e definido por

$$S\, z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j}$$

$$= z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \ldots$$

$$= (1 + B + B^2 + \ldots)\, z_t$$

$$= (1 - B)^{-1}\, z_t$$

$$= \nabla^{-1}\, z_t \,.$$

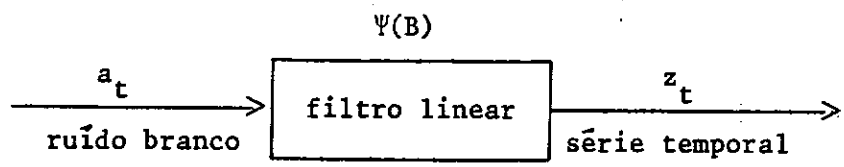
Então $\quad S = \nabla^{-1}$. ■

2.2 – TIPOS DE MODELO

Descrevem-se, a seguir, os principais tipos de modelos utilizados no estudo de séries temporais. Existem, ainda, modelos multivariados (19), que não serão tratados no presente trabalho.

2.2.1 – Modelo de Filtro Linear

Este modelo considera a série temporal como sendo gerada a partir de ruído branco, através de um filtro linear, como esquematizado abaixo:



A série é, então, representada por uma soma ponderada de observações prévias do ruído branco:

$$z_t = \mu + a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \ldots$$

$$= \mu + \Psi(B)\, a_t \,, \qquad (2.2.1)$$

o [illegible] nível da série e

[illegible] função de transfe

[illegible] é finita, ou infi

[illegible] e a série z_t é estacioná

[illegible] processo varia. Caso contrá

[illegible] em significado especial, a não ser

[illegible] nível da série.

-regressivo

Sejam $\tilde{z}_t = z_t - \mu$ os desvios em relação a μ. Então,

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \qquad (2.2.2)$$

é um processo auto-regressivo de ordem p, denotado por AR(p). Em outras palavras, a série é representada por uma soma ponderada de p observações anteriores da série mais um termo aleatório. Definindo-se o operador auto-regressivo de ordem p por

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$

pode-se escrever

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = a_t\ . \qquad (2.2.3)$$

Observa-se que $\phi(B) = \Psi^{-1}(B)$, isto é, que o modelo auto-regressivo pode ser escrito na forma do modelo de filtro linear.

Exemplo 2.2 - O quadro 2.1 e a figura 2.1 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo AR(1), onde $a_t \sim N(0,1)$:

$$z_t = 0{,}8\ z_{t-1} + a_t\ .$$

■

2.2.3 – Modelo de Médias Móveis

Um processo

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1\ a_{t-1} - \theta_2\ a_{t-2} - \ldots - \theta_q\ a_{t-q}\ , \qquad (2.2.4)$$

em que a série é vista como uma soma ponderada de q observações anteriores do ruído é chamado processo de médias móveis de ordem q, denota

QUADRO 2.1 - Série Simulada A, Modelo AR(1)

t	z_t	t	z_t
1	0,656	26	4,853
2	1,057	27	4,649
3	-1,750	28	4,821
4	-0,489	29	4,441
5	-2,861	30	5,496
6	-2,227	31	3,892
7	-2,014	32	4,290
8	-3,773	33	3,746
9	-3,333	34	3,723
10	-0,626	35	1,111
11	-0,731	36	3,480
12	-0,549	37	2,144
13	-1,801	38	1,252
14	-0,538	39	-0,006
15	-0,292	40	0,412
16	-0,444	41	1,958
17	1,648	42	1,883
18	2,183	43	0,344
19	-0,253	44	-0,708
20	-1,069	45	-1,852
21	-2,092	46	-2,318
22	-1,993	47	-2,300
23	-1,187	48	-0,937
24	1,394	49	-1,799
25	3,098	50	-1,698

Modelo: $z_t = 0,8\ z_{t-1} + a_t$.

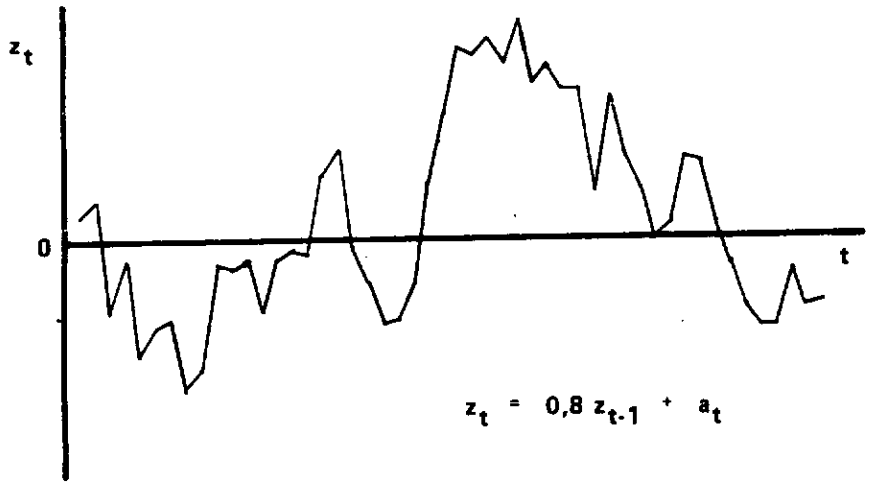


FIGURA 2.1 — Gráfico da Série Simulada A, Modelo AR (1).

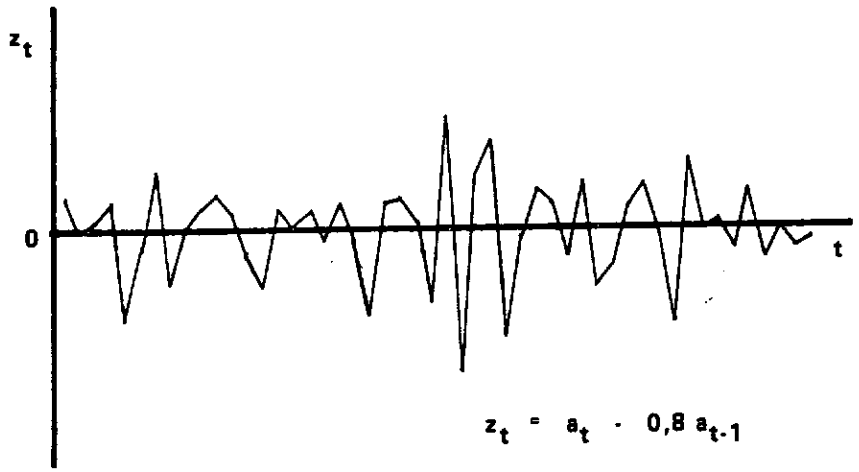


FIGURA 2.2 — Gráfico da Série Simulada B, Modelo MA (1).

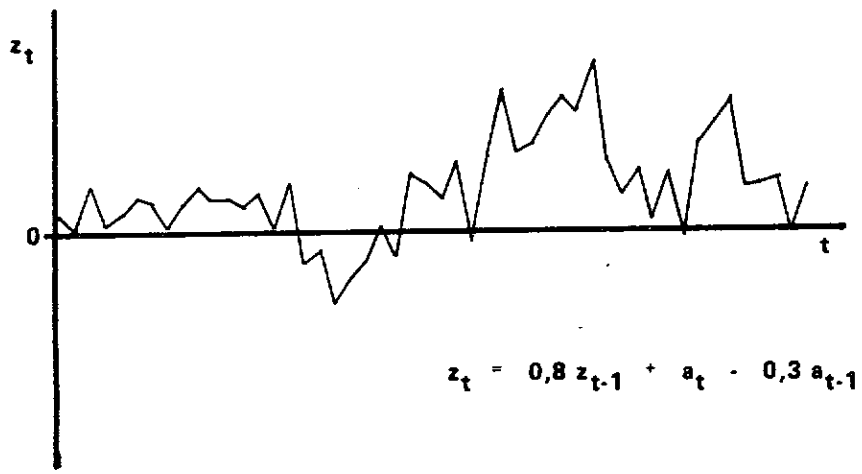


FIGURA 2.3 — Gráfico da Série Simulada C, Modelo ARMA (1,1).

do por MA(q). Definindo-se o operador de médias móveis de ordem q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

pode-se escrever

$$\tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t\ . \qquad (2.2.5)$$

A expressão médias móveis não é apropriada neste caso, mas, seu uso já se generalizou.

Exemplo 2.3 - O quadro 2.2 e a figura 2.2 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo MA(1):

$$z_t = a_t - 0{,}8\ a_{t-1}\ . \qquad \blacksquare$$

2.2.4 – Modelo Misto Auto-regressivo e de Médias Móveis

É o modelo que inclui tanto termos auto-regressivos como termos de médias móveis, sendo denotado por ARMA (p,q):

$$\tilde{z}_t = \phi_1\ \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p\ \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1\ a_{t-1} - \ldots - \theta_q\ a_{t-q} \qquad (2.2.6)$$

ou

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t. \qquad (2.2.7)$$

Exemplo 2.4 - O quadro 2.3 e a figura 2.3 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte mo

QUADRO 2.2 - Série Simulada B, Modelo MA(1)

t	z_t	t	z_t
1	0,811	26	2,908
2	-0,028	27	-3,726
3	0,159	28	1,376
4	0,663	29	2,261
5	-2,299	30	-2,789
6	-0,494	31	-0,220
7	1,498	32	1,038
8	-1,408	33	0,730
9	0,032	34	-0,664
10	0,487	35	1,166
11	0,888	36	-1,548
12	0,458	37	-0,974
13	-0,316	38	0,524
14	-1,513	39	1,093
15	0,545	40	-0,118
16	0,071	41	-2,390
17	0,447	42	1,765
18	-0,287	43	-0,038
19	0,570	44	0,249
20	-0,336	45	-0,460
21	-2,074	46	0,894
22	0,748	47	-0,775
23	0,858	48	-0,031
24	0,248	49	-0,497
25	-1,902	50	0,288

Modelo: $z_t = a_t - 0,8\ a_{t-1}$.

delo ARMA (1,1):

$$z_t = 0{,}8\ z_{t-1} + a_t - 0{,}3\ a_{t-1}\ . \qquad \blacksquare$$

2.2.5 – Modelo de Função de Transferência

Este modelo considera a série temporal z_t como sendo gerada a partir de outra série temporal x_t através de um filtro linear, como esquematizado abaixo:

$$\underset{\text{série de entrada}}{\xrightarrow{x_t}} \boxed{\overset{v(B)}{\text{filtro linear}}} \underset{\text{série de saída}}{\xrightarrow{z_t}}$$

Então, a série de saída z_t pode ser escrita como uma soma ponderada de observações prévias da série de entrada x_t:

$$z_t = v_o\ x_t + v_1\ x_{t-1} + v_2\ x_{t-2} + \ldots$$

$$= v(B)\ x_t. \qquad (2.2.8)$$

A função de transferência do filtro,

$$v(B) = v_o + v_1\ B + v_2\ B^2 + \ldots$$

também pode ser expressa como a razão de dois polinômios:

QUADRO 2.3 - Série Simulada C, Modelo ARMA (1,1)

t	z_t	t	z_t
1	0,466	26	0,904
2	0,069	27	1,836
3	1,158	28	-0,259
4	0,187	29	1,876
5	0,483	30	3,688
6	0,920	31	1,988
7	0,754	32	2,241
8	0,218	33	2,993
9	0,810	34	3,515
10	1,250	35	3,185
11	0,949	36	4,370
12	0,913	37	1,929
13	0,705	38	0,874
14	1,009	39	1,556
15	0,147	40	0,267
16	1,336	41	1,496
17	-0,793	42	-0,207
18	-0,484	43	2,265
19	-1,932	44	2,819
20	-1,333	45	3,425
21	-0,752	46	1,072
22	0,092	47	1,150
23	-0,562	48	1,340
24	1,521	49	-0,047
25	1,336	50	1,100

Modelo: $z_t = 0,8\ z_{t-1} + a_t - 0,3\ a_{t-1}$.

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} = \frac{\omega_o - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r} \tag{2.2.9}$$

A série de pesos v_o, v_1, v_2, ... é chamada função resposta de impulso. O filtro linear diz-se estável se a série v(B) converge para $|B| \leqslant 1$.

O modelo de função de transferência pode conter, também, um ruído:

$$z_t = v(B)\ x_t + n_t, \tag{2.2.10}$$

onde n_t e x_t são independentes. O ruído n_t pode, por sua vez, ser descrito por um modelo estocástico não-estacionário.

$$n_t = \Psi(B)\ a_t = \varphi^{-1}(B)\ \ \theta(B)\ a_t. \tag{2.2.11}$$

Os modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q) são vistos com mais detalhes no próximo capítulo e os modelos de função de transferência, no capítulo 5.

2.3 – AUTOCORRELAÇÃO

Em geral, uma série temporal estacionária de 2ª ordem pode ser descrita por sua média, sua variância e sua função de autocorrelação, ou, de maneira equivalente, por sua média, sua variância e sua função densidade espectral. Para os objetivos do presente trabalho, a primeira maneira é mais interessante, como será visto nos itens seguintes.

Definição 2.5 — Autocovariância

Seja um processo estacionário z_t, $t = 1, 2, \ldots$ A covariância entre duas observações z_t e z_{t+k}, separadas por k intervalos de tempo, $k = 0, 1, \ldots$, é chamada autocovariância no *lag* k e é definida por

$$\gamma_k = \text{cov}\,[z_t, z_{t+k}] = E\,[(z_t - \mu)\,(z_{t+k} - \mu)] \quad . \qquad (2.3.1)$$

A função de autocovariância é a autocovariância vista como função de k. *Lag* pode ser entendido como *defasagem*. ■

Definição 2.6 — Autocorrelação

De maneira semelhante define-se a autocorrelação entre duas observações z_t e z_{t+k}, $t = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, 1, \ldots$, por

$$\rho_k = \frac{E\,[(z_t - \mu)\,(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]\;\;E\,[(z_{t+k} - \mu)^2]}}$$

$$= \frac{\gamma_k}{\sigma^2_z} = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}\,, \qquad (2.3.2)$$

pois, uma vez que o processo é estacionário, a variância $\sigma^2_z = \gamma_o$ é constante no tempo.

Então, $\rho_o = 1$.

A função de autocorrelação é a autocorrelação vista como função de k. ∎

Definição 2.7 — Espectro

A transformada de Fourier da função de autocovariância, definida no caso contínuo como

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\tau \; e^{-i\lambda\tau} \, d\tau ,$$

$$-\infty < \lambda < \infty , \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_\tau| \, d\tau < \infty , \tag{2.3.3}$$

e no caso discreto como

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k} ,$$

$$-\pi < \lambda \leqslant \pi , \quad \sum_k |\gamma_k| < \infty , \tag{2.3.4}$$

é chamada função densidade espectral e é utilizada na Análise Espectral (21). Matematicamente, ambas são equivalentes, mas, cada uma mostra o processo estocástico sob um ângulo diferente. ∎

2.3.1 – Estimação da Média

Para processos que possuem média, ela pode ser estimada pela média aritmética das observações

$$\hat{\mu} = \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t \, . \tag{2.3.5}$$

2.3.2 – Estimação das Funções de Autocovariância e de Autocorrelação

Sendo $z_1, z_2, \ldots, z_N$ as observações da série temporal, a estimativa da autocovariância no *lag* k é dada por

$$\hat{\gamma}_k = c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})\,(z_{t+k} - \bar{z}) \, , \tag{2.3.6}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, K,$$

de onde a estimativa da variância é dada por

$$\hat{\sigma}^2_z = c_o = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (z_t - \bar{z})\,(z_{t+k} - \bar{z}) \, . \tag{2.3.7}$$

Essas estimativas são assintoticamente não-viciadas, quando N tende para infinito (20).

Das diversas estimativas sugeridas para a função de autocorrelação no *lag* k (20), a mais satisfatória tem sido

$$r_k = \frac{c_k}{c_o} \tag{2.3.8}$$

Na prática, para se obter uma boa estimativa são necessárias pelo menos 50 observações e K deve ser não superior a N/4 (5).

2.3.3 — Intervalo de Confiança para a Autocorrelação

Na fase de identificação do modelo, como será visto adiante, é necessária uma verificação mais ou menos grosseira para saber se ρ_k é nula além de um certo *lag*. Uma expressão aproximada para a variância da estimativa da autocorrelação de um processo estacionário normal foi desenvolvida por BARTLETT (3):

$$\text{var}\ (r_k) \simeq \frac{1}{N} \sum_{v=-\infty}^{\infty} [\rho^2_v + \rho_{v+k}\,\rho_{v-k} - 4\rho_k\,\rho_v\,\rho_{v-k} + 2\rho^2_v\,\rho^2_k] \qquad (2.3.9)$$

Para um processo em que as autocorrelações são nulas para $v > q$, todos os termos do lado direito de (2.3.9), exceto o primeiro, anulam-se quando $k > q$, simplificando a fórmula para

$$\text{var}\ (r_k) \simeq \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^{q} \rho^2_v],\ k > q \qquad (2.3.10)$$

Substituindo-se em (2.3.10) as autocorrelações por suas estimativas, obtém-se uma estimativa para a variância da estimativa da autocorrelação:

$$\hat{\sigma}^2(r_k) = \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^{q} r^2_v],\ k > q \qquad (2.3.11)$$

Sob a hipótese de normalidade de r_k, o que é razoável para N suficientemente grande (20, p.187), pode-se construir um intervalo de confiança aproximado para a autocorrelação:

$$r_k \pm t_{\alpha/2} \; \hat{\sigma}(r_k) \; , \qquad (2.3.12)$$

onde $t_{\alpha/2}$ é o valor da estatística t de Student ao nível de significância α. Na prática usa-se $t_{\alpha/2} = 2$.

Exemplo 2.5 - As estimativas das autocorrelações e de seus respectivos desvios padrões das séries simuladas A, B e C encontram-se no capítulo 4. As estimativas das médias e dos desvios padrões destas séries são:

a) processo AR(1)

$\bar{z}_A = 0{,}4578$ e $s_A = 2{,}4509$;

b) processo MA(1)

$\bar{z}_B = -0{,}0420$ e $s_B = 1{,}2726$; e

c) processo ARMA (1,1)

$\bar{z}_C = 1{,}0772$ e $s_C = 1{,}2988$. ■